ArteScienza N. 6 dicembre 2016

Matematica: una regina nel Regno di Utopia?

Giordano Bruno*

Sunto: Attraverso un dialogo si cerca di rappresentare quanto possa essere interessante e avvincente il "cammino" della matematica. Fermandosi a parlare di contraddizioni, di paradossi, di crisi dei fondamenti e di quel pensiero utopico che ne ha contrassegnato lo svolgersi. Un esempio, mi auguro, di come poter "raccontare" il pensiero e lo sforzo dell'uomo nella costruzione della conoscenza.

Parole Chiave: logica, relazione, dubbio, paradosso, indecidibilità.

Abstract: Through a dialogue we try to represent as it can be interesting and exciting the "path" of mathematics. Pausing to speak of contradictions, paradoxes, the crisis of the foundations and the utopian thinking that marked the unfolding. An example, I hope, how to "tell" the thought and man's effort in the construction of knowledge.

Keyword: logic, relationship, doubt, paradox, indecisiveness.

Citazione: Bruno G., *Matematica: una regina nel Regno di Utopia?*, «ArteScienza», Anno III, N. 6, pp. 11-28.

Vidi il maestro di color che sanno
seder tra filosofica famiglia.
Tutti lo miran, tutti onor li fanno:

quivi vid'io Socrate e Platone,
che innanzi a li altri più presso li stanno;
…
Euclide geomètra e Tolomeo,
Ipocrite, Avicenna e Galïeno,
Averoís, che 'l gran commento feo.

Dante Alighieri (Inf. IV, 131-144)

* Direttore onorario di «ArteScienza».e Presidente onorario dell'Associazione culturale "Arte e Scienza", matematico, direttore di ISIA Design Roma; gibrun84@gmail.com.

1 - Prologo

La matematica si scopre o si inventa?

Ecco una domanda che ha sempre fatto da sfondo allo sviluppo delle conoscenze matematiche.

Ma … un momento, cosa accade?

Ahimé … non appena ho scritto conoscenze matematiche, mi sono reso conto che involontariamente mi sono schierato dalla parte di coloro che ritengono che si inventa, altrimenti avrei dovuto parlare di conoscenza matematica; ma se lo avessi fatto mi sarei schierato con chi ritiene che si scopre e quindi … sono andato a infilarmi con le mie stesse mani in un paradosso, impedendomi di andare avanti!

Oddio come uscirne? Beh, rifletto: cosa ci sta a fare allora l'Isola di Utopia, l'isola che non c'è? Questa domanda la colloco lì e non ho problemi: così posso non rispondere e me la cavo.

Sì, ma come procedo?

Procedo raccontando un po' di fatti successi in matematica e lascio giudicare a voi se provengono da quell'Isola (o da qualche altra parte), oppure se sono soltanto stati creati da qualche mente, particolarmente di-vertita e di-vergente, come per lo più quella dei matematici. [1]

2 - Dialogo tra due personaggi: Alice e Filippo[2]

ALICE - Vorrei tanto sapere se la matematica nasce da fuori o da dentro di noi!

---

1 Chi volesse approfondire i contenuti di questo dialogo immaginario può consultare i seguenti testi: M. Kline, *La matematica nella cultura occidentale*, Feltrinelli; C. B. Boyer, *Storia della matematica,* Isedi; R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica?,* Boringhieri; J. D. Barrow, *La luna nel pozzo cosmico*, Adelphi; S. Baruk, *Dizionario di matematica elementare,* Zanichelli;L. Lombardo Radice, L. Mancini Proia, *Il metodo matematico*,vol.I, Principato; E. Abbot, *Flatlandia*, Adelphi.

2 I nomi dei due personaggi non sono casuali. Il primo, Filippo, fa riferimento al vero nome di fra Giordano Bruno, il grande filosofo omonimo dell'Autore di questo articolo. Il secondo è proprio quella Alice che non si connota come elemento femminile ma come rappresentante del desiderio di conoscere.

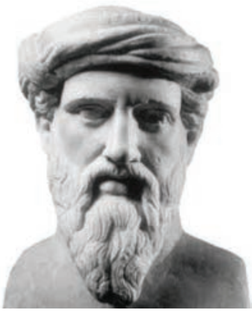

Fig. 1 Pitagora.

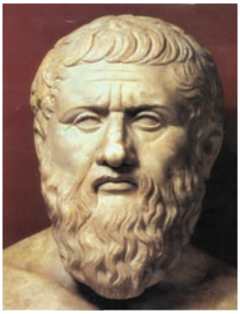

Fig. 2 - Platone.

FILIPPO - Cara Alice: Come al solito hai fatto una domanda da un milione di euri (… e dico euri e non dollari perché come sai oggi l'euro vale più del dollaro!). Non so se qualcuno sia in grado di risponderti in maniera definitiva, ma posso dirti che molti ci hanno provato. Anche a me interessa saperne qualcosa di più, insieme potremo ripercorrere un po' di storia del pensiero matematico, in modo che tu, come è giusto che sia, ti possa formare un'opinione personale, che alla fin fine è quello che più conta. Sei pronta? Pronti a tuffarci in questa avventura?

ALICE - Sì, non vedo l'ora!

FILIPPO - Per prima cosa, cominciamo col dire che, come sempre accade per noi che facciamo risalire tutto (o quasi) ai greci, Platone e Aristotele diedero due risposte diverse alla domanda che ti intriga tanto. Devi sapere che Platone era affascinato dai pitagorici (Pitagora e i suoi seguaci), i quali a loro volta erano affascinati, o per meglio dire folgorati, dai numeri. Dai babilonesi avevano appreso che i numeri si potevano associare alle costellazioni e, per conto loro, avevano scoperto che la musica era fatta di numeri, che le attività commerciali non potevano prescinderne, insomma in poche parole erano convinti che le cose stesse fossero numeri e che questi fossero i costituenti fondamentali della realtà. Ma di più, arrivarono persino ad associare i numeri a concetti astratti come, ad esempio, quello di giustizia. Tanto che Filolao di Crotone (V sec. a.C.) così ebbe a esprimersi: «Tutte le cose che possono essere conosciute hanno numero, infatti è impossibile che una cosa venga concepita o conosciuta senza numero».

Platone fu molto colpito da come i pitagorici avevano relazionato la matematica con altre forme di conoscenza astratta e la sua filosofia si estrinsecò proprio nel tentativo di comprendere il legame che intercorre tra gli oggetti particolari e i concetti universali.

Da qui nacque la sua convinzione che, poiché siamo capaci di concepire enti matematici perfetti, quali numeri, linee rette, triangoli, rette parallele, angoli retti, quadrati, al contrario di quanto accade nella realtà in cui si trovano esemplari imperfetti, in qualche luogo tali enti dovessero realmente esistere. E questo qualche luogo non è certamente la mente umana ma quello che Platone chiamava Iperuranio o Mondo delle idee. Per cui a noi non rimane altro da fare se non scoprire i legami tra questi enti.

Aristotele, al contrario, rifiutava questa tesi e tagliava corto affermando che «le forme che danno identità alle cose sono nelle cose».

ALICE - Quindi se ho capito bene, poiché Platone colloca la matematica al di fuori di noi (in un luogo che non c'è!) potremmo dire che questo è il primo legame tra Matematica e Utopia. Anzi mi verrebbe da dire che la matematica nasce … sotto il segno di Utopia! (… anche se a dire il vero ai tempi di Platone l'Isola di Utopia non era stata ancora inventata)

FILIPPO - In un certo senso hai ragione, vedremo insieme che questo rapporto tra Utopia e Matematica non si esaurisce in Platone, ma è presente lungo tutta la storia della matematica e trova ancora riscontro in molti matematici a noi vicini. Naturalmente è anche fortemente presente l'altra concezione che considera la matematica come opera esclusiva dell'uomo, quella che (tanto per capirci tra noi) potremmo chiamare la visione aristotelica.

ALICE - Un'altra cosa che mi ha sempre colpito è che quando a scuola si parlava di geometria, si sottintendeva sempre euclidea.

FILIPPO - Anche in questo caso hai ragione: è proprio quello che accade. E sai perché? Perché questo grande matematico, Euclide, è stato in grado di costruire un edificio grandioso che ha retto per almeno due millenni: quello che appunto chiamiamo geometria euclidea! Egli aveva fornito una formulazione rigorosa e precisa dei teoremi relativi agli enti e alle figure geometriche (naturalmente per allora … ricordati che tutto il cosiddetto sapere sottoposto a una revisione successiva e con strumenti diversi presenta imprecisioni, imperfezioni …se non errori, in fondo è proprio questo che rende ricchi e piacevoli lo studio e la ricerca). I teoremi erano stati dedotti

Fig. 3 - Euclide.

attraverso le regole della logica, a partire da cinque assiomi e cinque postulati. Oggi i matematici non fanno più distinzione fra assiomi e postulati mentre, invece, Euclide (come riporta Aristotele) faceva distinzione tra i due concetti.

Gli assiomi sono proposizioni che hanno un'evidenza universale, essendo validi in tutti i campi e quindi per tutte le branche della matematica e sono:

1. La parte è minore del tutto.
2. Due cose uguali ad una terza sono uguali fra loro.
3. Aggiungendo a due cose uguali altre due cose uguali si ottengono cose uguali.
4. Sottraendo da due cose uguali altre due cose uguali si otten-

gono cose uguali.
5. Due cose che coincidono sono uguali.

I postulati, invece, sono proposizioni valide soltanto per la geometria e, poiché presentano una minor evidenza rispetto agli assiomi, si "chiede" al lettore di accettarne la verità e ciò giustifica il loro nome:

1. Da ogni punto del piano ad ogni altro punto è possibile condurre una linea retta.
2. Un segmento di linea retta può essere indefinitamente prolungato in linea retta.
3. Attorno ad un centro scelto a piacere con un raggio scelto a piacere è possibile tracciare una circonferenza.
4. Tutti gli angoli retti sono uguali tra loro.
5. Ogni volta che una retta, intersecando altre due rette, forma con esse angoli interni da una medesima parte (angoli coniugati interni) la cui somma è minore di due retti, allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono con l'incontrarsi da quella parte nella quale gli angoli anzidetti formano insieme meno di due retti.

Quest'ultimo, che noi conosciamo con il nome di "postulato delle parallele", si può esprimere più semplicemente così: in un piano per un punto esterno a una retta data passa una e una sola retta parallela.

Sai Alice, però, quale è stata la cosa più sorprendente? Che fino al XIX secolo la geometria di Euclide ha avuto un ruolo eccelso: quello di rappresentare il mondo nella sua essenza! Sino ad allora, rifletti, gli uomini pensavano che non c'è il mondo senza geometria euclidea e non c'è geometria euclidea senza il mondo!

Euclide aveva intuito le verità geometriche, disegnando figure sulla sabbia e indagando sulle relazioni che si potevano stabilire tra linee, angoli e forme. Queste

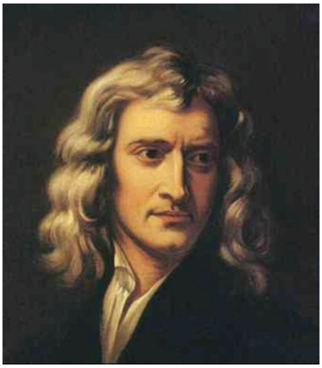

Fig. 4 - Isaac Newton.

verità, che sembravano così evidenti, erano diventate i pilastri su cui era costruita la realtà!

Su di esse si reggevano l'architettura e la composizione artistica, la navigazione e l'astronomia; insomma sembrava che l'uomo fosse in possesso di quella *clavis universalis* che gli permetteva di aprire qualunque porta riferita alla conoscenza (come sarebbe bella questa … utopia!).

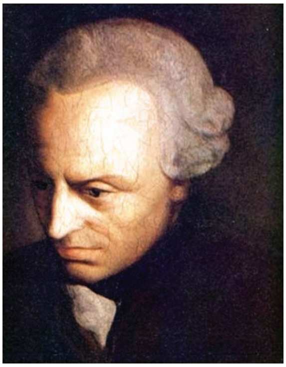

Fig. 5 - Immanuel Kant.

Il grande Isaac Newton ancora nel XVII secolo, nei suoi *Principia* (abbreviazione di *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica),* aveva fondato il proprio mondo, così perfettamente meccanico e determinato, sulla geometria euclidea!

Tale assoluta e per allora convincente certezza, durante quel secolo e il successivo, aveva invaso molti altri ambiti: da quello del governo delle cose umane a quello del governo delle cose divine!

Prove in favore dell'esistenza di Dio si basavano sulle leggi di natura geometriche enunciate da Newton. In sostanza l'Onnipotente era considerato il grande Geometra e Architetto della Natura.

Un altro grande, Immanuel Kant, attribuiva alla geometria euclidea il carattere di conoscenza sintetica a priori, cioè di qualcosa che è necessariamente vera!

In definitiva, fino a un paio di secoli fa esisteva il migliore dei mondi possibili (per lo meno da un punto di vista epistemologico): era quello dell'aritmetica e della geometria di Pitagora ed Euclide!

Fig. 6 - Galileo Galilei.

ALICE - Mi hai raccontato una storia che mi fa ancora girare un po' la testa, ma la cosa più drammatica è che mi pare che non sia assolutamente finita qui!

FILIPPO - Mi sono stufato di darti ragione, però devo continuare a farlo. È vero,

Fig. 7 - Bonaventura Cavalieri.

non è finita qui.

Devi sapere che a un certo punto, tra il XVI e XVII secolo, successero tante cose importanti. Ricordi cosa produssero... Galilei, Keplero, Cavalieri, tanto per fare qualche nome? Tra queste una delle più importanti, per la matematica e non solo, fu la pubblicazione di un trattato chiamato *Discorso sul metodo per ben condurre la propria ragione e cercare la verità nelle scienze* (traduzione letterale del titolo originale in francese) di un certo signore che si chiamava René Descartes (più noto con il nome italianizzato Cartesio), con in appendice un altro scritto *La Geometrie* . Per farla breve nel primo, il padre della filosofia moderna, Cartesio, attraverso il dubbio sistematico indicava la via per giungere a idee chiare e distinte da cui dedurre conclusioni vere. Con il secondo si proponeva di trovare, potremmo dire oggi, un linguaggio unificato per la geometria e l'algebra: infatti, ad esempio, come indicato nei titoli stessi, nel primo paragrafo si occupava di *Che relazione esiste tra il calcolo dell'aritmetica e le operazioni della geometria* e nel secondo di *Come effettuare geometricamente la moltiplicazione, la divisione e l'estrazione delle radici quadrate*. Cartesio, cioè, a differenza di ogni altro suo predecessore, fu il primo a utilizzare sistematicamente l'algebra simbolica nella geometria e a sviluppare un'interpretazione geometrica dell'algebra.

Fig. 8 - Gottfried von Leibniz.

Un'altra grande utopia si affacciava nel mondo della matematica. Vedi, voglio farti un piccolo esempio. Archimede (ricordi il grande matematico-ingegnere siracusano?) nella sua famosa opera *Sulla sfera e il cilindro*, scritta nel 200 a.C. circa, affermava: «Ogni cilindro avente per base il circolo massimo della sfera e l'altezza uguale al diametro della sfera, è una volta e mezza la sfera». Noi oggi ci esprimiamo così: se una sfera ha raggio r, ogni suo cerchio massimo ha area:

$$A = \pi r^2 .$$

Un cilindro (circolare retto) che ha area di base A e altezza 2r, ha volume:

(1) $$C = A \times 2r = 2\pi r^3 .$$

Archimede si esprimeva invece così:

$$C = \frac{3}{2} S \quad ,$$

essendo S il volume della sfera, da cui si può ricavare che:

(2) $$S = \frac{2}{3} C \quad ,$$

e in base al calcolo espresso dalla (1) si ottiene

(3) $$S = \frac{4}{3} \pi r^3 .$$

Se leggiamo bene la (2), che possiamo attribuire ad Archimede, e la (3), che possiamo attribuire a Cartesio, notiamo che la (2) esprime una relazione geometrica tra due solidi mentre la (3) esprime una

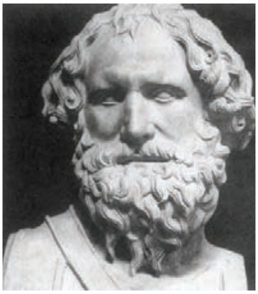

Fig. 9 - Archimede.

Fig. 10 - Cartesio.

relazione numerica tra due grandezze, superficie e raggio in questo caso, ma che potrebbe valere per qualunque altra coppia di grandezze numeriche, che indichiamo con y e x, e per le quali potremmo scrivere:

$$y = \frac{4}{3}\pi x^3 \; .$$

Se poi interpretiamo questa legge, che fa dipendere i valori di y dai valori di x, come quella che oggi chiamiamo funzione e che in maniera simbolica indichiamo con y = f(x), la possiamo rappresentare attraverso il metodo delle coordinate, ottenendo una bella curva grafico della funzione in quel piano che, guarda un po', chiamiamo cartesiano e che ha come assi le due rette che indichiamo con x e y:

ALICE - Ma … ma, cosa è successo?! Oddio, mi è sembrato di essere caduta in un vortice senza fine, ho visto rette che si trasformavano in numeri, numeri che diventavano rette, coppie di numeri che si trasformavano in curve e curve che si scomponevano in coppie di numeri! Quasi quasi, stavo per darli io i numeri!!!

FILIPPO - A proposito di dare i numeri, sai che c'è stato un grande del Settecento che ha tentato, ancora una volta, diciamo così di ridurre tutto a numero? Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), ti ricorda qualcuno? Ebbene proprio lui si era messo in testa di costruire un linguaggio universale in grado di rappresentare tutti gli enunciati e le forme del ragionamento umani. Cercò, a tale fine, di scindere le varie parti del ragionamento in componenti logiche, associando a ciascuna di esse un numero primo (ricordi cos'è? un numero divisibile solo per se stesso e per 1, ovvero un numero che ammette solo due divisori).

Così egli stesso si esprimeva in merito:

> Tutta la nostra attività razionale consiste semplicemente nel mettere insieme e sostituire dei caratteri, siano questi parole o simboli o immagini … se riuscissimo a trovare caratteri o segni appropriati per esprimere tutti i nostri pensieri con la stessa chiarezza e precisione con cui l'aritmetica esprime i numeri e l'analisi geometrica esprime le linee, potremmo estendere ciò che si fa in aritmetica e in geometria a tutti i campi che siano riconducibili al ragionamento. Infatti tutti i problemi che dipendono dal ragionamento verrebbero affrontati tramite la trasposizione di caratteri e una sorta di calcolo … E se qualcuno mettesse in dubbio i miei risultati, gli direi: "Calcoliamo, signore", di modo che, ricorrendo a penna e inchiostro, risolveremmo la questione in breve tempo.

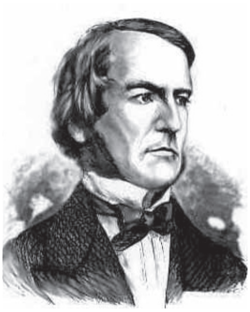

Fig. 11 - George Boole.

Leibniz per realizzare il suo progetto aveva escogitato il seguente metodo: a ogni termine della proposizione esaminata veniva assegnato un numero con un'unica restrizione, in modo che ad ogni termine combinazione di altri termini si attribuisse un numero prodotto dei numeri corrispondenti agli altri termini. Cioè, ad esempio, se si associa 2 al termine "essere animato" e 3 al termine "razionale" si deve associare 6=3x2 al termine "uomo", essendo "uomo = essere animato razionale".

Il grande sogno di Leibniz, riassumibile nel suo *Calculemus*, non si realizzò; però non rimase improduttivo, fu ripreso per primo da George Boole (1815-1864) che nel 1847 propose una formulazione della logica simbolica. Egli, nelle sue due opere: *Analisi matematica della logica - saggio per un calcolo del ragionamento deduttivo* (1847) e I*ndagine sulle leggi del pensiero* su cui sono fondate le teorie matematiche della logica e della probabilità (1854), sviluppò il calcolo logico proposizionale e introdusse l'algebra dei sottoinsiemi di un insieme (quella che oggi viene chiamata algebra di Boole), e fece osservare la perfetta corrispondenza formale tra le operazioni logiche e quelle insiemistiche!

Più in avanti, il matematico italiano Giuseppe Peano, alla fine del secolo XIX, si propose di sviluppare un linguaggio formalizzato, contenente non solo la logica ma anche tutti i più importanti risultati della matematica in ogni settore. Egli cercò in particolare di ridurre tutta l'aritmetica a un sistema assiomatico completo.

Fig. 12 - Giuseppe Peano.

Pensa che i simboli, che noi usiamo comunemente, $\in$ (appartiene a, è elemento di), $\cup$ (unione o somma logica), $\cap$ (intersezione o prodotto logico), $\supset$ (contiene), sono stati introdotti da lui!

ALICE - Un momento, mi sento di nuovo perdere, lasciami riprendere un po' fiato. Mi sembra di partecipare a uno di quei balli che non finiscono mai e dove si cambia continuamente cavaliere! Non riesco a capire dove mi stai trascinando, cosa mi vuoi far intendere realmente?

FILIPPO - Lo so è vero, hai ragione nuovamente. È che mentre parlo con te, mi rendo conto dello sforzo che l'uomo attraverso i matematici, i logici e i filosofi (oggi li distinguiamo, ma prima era diverso) ha intrapreso per, diciamo così, liberarci dalla realtà apparente, sensibile, e fondare le nostre idee, conoscenze e concezioni su di un linguaggio e una struttura formale che ci garantissero di poter stabilire la loro coerenza; per cui cercando di onorare il loro sforzo, vorrei il più possibile renderti partecipe di quanto è accaduto nei secoli (anche se maledettamente abbiamo sempre poco tempo). Vedi, in fondo, ci siamo rapidamente accostati al Novecento, il secolo a noi più vicino, ma anche il secolo che definirei dello sconquasso! Ti suggeriscono niente questi nomi (li cito così come mi vengono in mente): Pirandello, Freud, Picasso, Einstein …? Beh, anche in matematica si arriva a una crisi, quella che in maniera elegante viene chiamata crisi dei fondamenti. Cercherò, adesso, di farti comprendere cosa è successo.

ALICE - D'accordo, penso di riuscire a seguirti. Ma se vedi che mi sto perdendo in un qualche labirinto ti prego di venirmi a salvare.

Fig. 13 - Bertrand Russell.

FILIPPO - Bene, allora procediamo. Quello che è accaduto è che nei primi anni del XX secolo, sull'onda di quanto ti ho illustrato in precedenza, ovvero seguendo quel filo sottile ma robusto che si dipana da Platone e Pitagora a Cartesio e a Leibniz e in avanti, i logico-matematici si accorgono che nel tempo erano stati proposti un certo numero di paradossi che avrebbero potuto minare le fondamenta del pensiero umano e in particolare della matematica. Da quello famoso del mentitore: "Io sto mentendo", fino ad arrivare al paradosso di quello straordinario personaggio che fu Bertrand Russell (1872-1970) relativo a "l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi come elementi"; questo insieme si chiedeva Russell contiene se stesso come elemento? Di questo paradosso se ne conosce una versione più immaginifica, dovuta a Russell stesso: "Un qualsiasi uomo di Siviglia viene rasato dal barbiere di Siviglia se e soltanto se non si rade da sé. Il barbiere si rade da sé?" Se lo facesse, verrebbe contraddetta la premessa secondo cui il barbiere rade solo gli uomini che non si radono da soli. Se invece il barbiere non si radesse da sè, allora dovrebbe essere rasato dal barbiere, che però è lui stesso: in entrambi i casi si cade in una contraddizione. In altri temini la domanda "il barbiere si rade da sé" ha due possibili risposte entrambe contraddittorie: se lo fa, non lo fa; ma se non lo fa, lo fa. Ma non si può dire e disdire allo stesso tempo e per il medesimo rispetto, diceva Aristotele, ovvero una cosa non può essere e non-essere contemporaneamente: sarebbe una contraddizione. Il cosiddetto "paradosso di Russell" è dunque

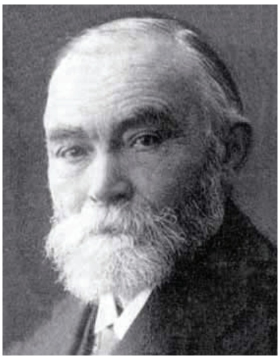

Fig. 14 - Gottlob Frege.

più propriamente un'antinomia e non un paradosso.[3] Russell, che stava terminando di scrivere, assieme ad Alfred North Whitehead (1861-1947) i suoi *Principia Mathematica*, opera con la quale si proponeva di fondare la matematica sulla logica simbolica (eccone un altro !!!), entrò profondamente in crisi. Il concetto di insieme presentava una contraddizione apparentemente insanabile. Russell lo comunicò a un altro logico tedesco, Gottlob Frege (1848-1925) che stava concludendo un trattato sui fondamenti logici dell'aritmetica. Costui apprese con sgomento quanto Russell gli descrisse e aggiunse al proprio libro questo commento:

> Difficilmente a uno scienziato può capitare qualche cosa di più sgradevole del veder cedere la base proprio quando ha finito il suo lavoro. Sono staso messo in questa posizione da una lettera del signor Bertrand Russell pervenutami mentre il libro stava finendo di essere stampato.[4]

Ma … Alice, ti vedo volteggiare, che ti succede?

ALICE - Sai volteggio un po', per sentirmi più leggera, perché per la verità non è così semplice seguirti. Però tu vai avanti perché la storia si sta facendo avvincente e anche se non riesco ad afferrare bene tutto, voglio sapere come va a finire.

FILIPPO - Bene continuo. A questo punto entra in scena David Hilbert (1862-1943), altro grande tra i grandi. Pensa che nel "Congresso internazionale di Matematica" di Parigi nel 1900 questo straordinario matematico tedesco sottopose ai suoi colleghi ventitrè problemi, le cui soluzioni, a suo dire, avrebbero aperto uno squarcio nei futuri progressi della matematica. E in realtà quelli risolti e quelli ancora insoluti costituiscono gli elementi centrali di interi campi della ricerca matematica. Il secondo dei ventitrè riguardava "la dimostrazione della coerenza degli assiomi dell'aritmetica". Questa fu la spinta fon-

---

3 Un paradosso è una affermazione logicamente corretta ma in contrasto con l'esperienza o con il modo corrente di pensare. Un'antinomia, invece, è una proposizione autocontraddittoria sia nel caso che sia vera sia nel caso che sia falsa.

4 Gottlon Frege, *I principi dell'aritmetica*, vol. 2 , Appendice, 1903.

Fig. 15 - Kürt Godel.

damentale che Hilbert seguì nelle sue ricerche e fu anche la risposta che diede alla domanda "che cos'è la matematica?". Per lui la matematica era qualcosa che poteva essere formalmente definita dal punto di vista logico, senza far intervenire alcun significato o riferimento alla realtà fisica. Quindi si doveva prescindere sia dai significati che dalle osservazioni, ma bisognava procedere solo attraverso connessioni logiche deducibili da assiomi coerenti, secondo regole di ragionamento prestabilite. Hilbert, quindi, aveva la massima fiducia nel fatto che un sistema assiomatico potesse essere assolutamente non contraddittorio. Ma come si fa a provare la sua non-contraddittorietà? Questo fu il problema che affrontò il logico austriaco Kurt Gödel (1906-1978).[5] Costui, smontò il giocattolo hilbertiano, tagliando le ali così a quella che possiamo ritenere una delle più grandi utopie della matematica!

Egli, infatti, dimostrò che qualunque sistema logico contenente l'aritmetica è necessariamente incompleto: ci saranno, cioè, sempre proposizioni del sistema di cui non si potrà stabilire se sono vere o false. [6] Inoltre, dimostrò anche che non è possibile provare, all'interno del sistema stesso che il sistema è logicamente coerente.[7]

Il risultato stupefacente di tutto ciò è, quindi, che anche in matematica esistono proposizioni indecidibili !

5 Kurt Gödel (1906-1978), più di due secoli dopo, in un enunciato attribuisce ad ogni connettivo logico, ad ogni quantificatore e ad ogni variabile, un differente numero primo; in modo da associare all'enunciato il prodotto dei numeri primi dei suoi componenti. E poiché ciascun numero naturale si può esprimere in uno ed un sol modo come prodotto dei suoi fattori primi, presi in ordine crescente, a un qualsiasi numero corrisponde un unico enunciato e così ogni enunciato si può scomporre in fattori primi in uno ed un sol modo.

6 Questa è la formulazione semplificata del "Primo teorema di incompletezza" di Godel: In ogni teoria matematica T sufficientemente espressiva da contenere l'aritmetica, esiste una formula φ tale che, se T è coerente, allora né φ né la sua negazione $\neg\varphi$ sono dimostrabili in T.

7 Questa è la formulazione semplificata del "Secondo teorema di incompletezza" di Godel: Sia T una teoria matematica sufficientemente espressiva da contenere l'aritmetica: se T è coerente, non è possibile provare la coerenza di T all'interno di T.

Oddio, ma che succede, Alice … sei forse svenuta?

ALICE- Beh sì, le tue ultime parole mi hanno profondamente colpita, mi sono sentita trascinata all'interno di una spirale (logaritmica) che continuava ad avvitarsi su se stessa e così ho perso i sensi!

Ma pensandoci bene adesso mi sento molto meglio, in fondo questo signor Gödel ha riportato la matematica sulla terra!

Sai ormai ero convinta che avrei dovuto effettuare un lunghissimo e faticosissimo viaggio verso l'Isola di Utopia per andare a trovare di persona la risposta alla domanda che ci siamo posti inizialmente. Mi sentivo un po' come il quadrato abitante del mondo piatto di *Flatlandia*, ospite di un mondo bidimensionale, non solo per questo inospitale, ma anche rigido, vischioso, chiuso nelle sue gerarchie e convenzioni. Anch'io ero alla ricerca di un essere tridimensionale, di una sfera che fosse in grado di aprirmi gli occhi e di condurmi in un altro mondo, un mondo aperto alla conoscenza, all'armonia e alla bellezza (ti ricordi è vero, caro Filippo, il famoso e delizioso racconto di Abbott ?).

FILIPPO - Sai Alice quello che dici mi fa riflettere. Anch'io mi sono lasciato prendere la mano un po' troppo dalla logica, una delle abitanti del nostro mondo, e ho tralasciato di condurti a passeggio in spazi il cui dominio è l'infinito. Non ti ho condotto in quel meraviglioso posto dove hanno imparato a sommare infiniti numeri o a calcolare la velocità di un treno che passa, sferragliando sui binari, precisamente nell'istante in cui stai entrando in stazione per salutare un amico che parte, o ancora a misurare esattamente la superficie di una piscina a forma di cardioide. Né ti ho portato a visitare il Paradiso di Cantor, per vedere il posto che occupano i diversi infiniti, dal numerabile al continuo e oltre. Né ti ho accompagnato attraverso il bitorzoluto, ma sorprendente, contorno di un insieme di Mandelbrot o al suo interno, dove procedendo ti sembra di

Fig. 16 - Bruno de Finetti.

vedere sempre cose già viste. Né, peraltro, ti ho fatto conoscere la strada percorsa da quegli "artisti del pensiero" che hanno contribuito a sviluppare quelle macchine che oggi chiamiamo computer. Né, infine, ti ho fatto soggiornare nella regione misteriosa dove ha sede il principato del probabile!

A questo proposito, in onore del mio Maestro, Bruno de Finetti, ci tengo proprio a dirti che il mio "grado di fiducia" (o probabilità, come meglio credi) nel trovare quel mondo di bellezza, armonia e conoscenza, di cui sei alla ricerca, è veramente elevatissimo.

Anzi, ora che ci penso meglio, direi che l'ho proprio trovato: è il Regno della matematica!

Prometto che un giorno o l'altro ti ci porterò.

Ringraziamenti

Si rigrazia l'ing. Luca Nicotra per la revisione del testo e i suggerimenti dati.

ArteScienza

Rivista telematica semestrale
http://www.assculturale-arte-scienza.it
Direttore Responsabile: Luca Nicotra
Direttori onorari: Giordano Bruno, Pietro Nastasi
Registrazione n.194/2014 del 23 luglio 2014 Tribunale di Roma
ISSN on-line 2385-1961
Proprietà dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza"